**Рекуррентные соотношения и производящие функции**

**1. Производящие функции и действия над ними**

**Определение.** Пусть a_0,a_1,a_2,\ldots— произвольная (бесконечная) последовательность чисел (целых, рациональных, вещественных или комплексных). *Производящей функцией (производящим рядом)* называется запись вида

\displaystyle A(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n .

**Замечание.** Не следует думать, что мы можем сказать, чему равно значение производящей функции Aв точке s=s_0. Переменная sявляется формальной, и ряд a_0+a_1s_0+a_2s_0^2+\ldotsсмысла не имеет. Единственное, что мы можем сказать про функцию A(s), это что ее значение в нуле равно a_0. Если, однако, производящий ряд является полиномом (т.е. все его коэффициенты кроме конечного числа равны нулю), то значение этого ряда в любой точке выражается конечной суммой и поэтому имеет смысл.

**Определение.** Суммой двух производящих функций

A(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+\ldotsи B(s)=b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots

называется производящая функция

A(s)+B(s)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)s+(a_2+b_2)s^2+\ldots

Произведением производящих функций Aи Bназывается производящая функция

A(s)B(s)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)s+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)s^2+\ldots

**2. Элементарные производящие функции**

Поскольку неудобно каждый раз записывать производящую функцию в виде ряда, то для некоторых часто встречающихся функций введены сокращенные записи.

**Определение.**

\displaystyle {\rm 1)}\ (1+s)^{\alpha}=1+\alpha s+{\alpha(\alpha-1)\over 2!}s^2+{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\over 3!}s^3+\ldots,

где \alpha— произвольное комплексное число.

Коэффициент при s^nв этой записи называется числом сочетаний из \alphaпо nи обозначается {\sf C}_{\alpha}^nили \left(\begin{array}{c}<br />
\alpha\\ n<br />
\end{array}\right).

\begin{array}{l}<br />
\displaystyle<br />
{\rm 2)}\ e^s=1+s+{s^2\over 2!}+{s^3\over 3!}+\ldots\\[3mm]<br />
\displaystyle<br />
{\rm 3)}\ \ln{1\over 1-s}=s+{s^2\over 2}+{s^3\over 3}+\ldots\\[3mm]<br />
\displaystyle<br />
{\rm 4)}\ \sin s=s-{s^3\over 3!}+{s^5\over 5!}-\ldots\\[3mm]<br />
\displaystyle<br />
{\rm 5)}\ \cos s=1-{s^2\over 2!}+{s^4\over 4!}-\ldots<br />
\end{array}

При натуральном значении \alphaчасть 1) определения совпадает с обычным определением степени многочлена. Пользуясь этим, можно получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, s=1и s=-1, получаем тождества:

\begin{array}{l}<br />
1+\alpha+{\sf C}_{\alpha}^2+{\sf C}_{\alpha}^3+\ldots+{\sf<br />
C}_{\alpha}^{\alpha}=2^{\alpha},\\<br />
1-\alpha+{\sf C}_{\alpha}^2-{\sf C}_{\alpha}^3+\ldots+(-1)^{\alpha}{\sf C}_{\alpha}^{\alpha}=0.<br />
\end{array}

Между введенными функциями имеются соотношения, которые также связаны с комбинаторными тождествами. Докажем, например, что

e^se^{-s}=1.

Действительно, свободный член произведения равен 1, а при n>0получаем

\displaystyle {1\over n!0!}-{1\over (n-1)!1!}+{1\over (n-2)!2!}-\ldots+{(-1)^n\over 0!n!},

что совпадает с левой частью равенства 2) при \alpha=n, откуда получаем требуемое.

**3. Деление производящих функций**

С делением производящих функций дело обстоит сложнее. Так, например, не существует формального степенного ряда B(s), такого, что sB(s)=1.

**Утверждение.** Пусть A(s)— формальный степенной ряд, такой, что A(0)\ne0. Тогда существует единственный формальный степенной ряд B(s), такой, что A(s)B(s)=1.

**Доказательство.** Проведем доказательство по индукции. b_0=1/a_0. Пусть теперь все коэффициенты ряда Bвплоть до степени nоднозначно определены. Коэффициент при степени n+1определяется из условия a_0b_{n+1}+a_1b_n+\ldots+a_{n+1}b_0=0. Это линейное уравнение относительно b_{n+1}, причем a_0\ne0. Поэтому это уравнение имеет единственное решение.

**Замечание.** Только что доказанное утверждение очевидно неверно, если мы рассматриваем формальные степенные ряды с целыми коэффициентами. Оно будет верно только в том случае, если a_0=\pm1.

**4. Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи**

*Последовательность чисел Фибоначчи* определяется соотношением f_0=0,f_1=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_nпри n\ge0. Ее члены 0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldotsВыведем производящую функцию для этой последовательности.

Определяющее соотношение для последовательности означает, что ее производящая функция Fib(s)=s+s^2+2s^3+3s^4+5s^5+\ldotsудовлетворяет соотношению (Fib(s)-s)/s=Fib(s)+Fib(s)s, откуда Fib(s)=s/(1-s-s^2).

Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

\begin{array}{l}<br />
\displaystyle<br />
{s\over 1-s-s^2}=-{5+\sqrt{5}\over 10s_1}\cdot{1\over 1-{s\over s_1}}- {5-\sqrt{5}\over 10s_2}\cdot{1\over 1-{s\over s_2}}=\\[5mm]<br />
\displaystyle<br />
=-{5+\sqrt{5}\over 10\cdot{-1-\sqrt{5}\over 2}}\left(1+{s\over s_1}+{s^2\over s_1^2}+\dots\right)-{5-\sqrt{5}\over 10\cdot{-1+\sqrt{5}\over 2}}\left(1+{s\over s_2}+{s^2\over s_2^2}+\ldots\right)=\\[5mm]<br />
\displaystyle<br />
=-{1\over \sqrt{5}}\left(1+{s\over s_1}+{s^2\over s_1^2}+\ldots\right)+ {1\over \sqrt{5}}\left(1+{s\over s_2}+{s^2\over s_2^2}+\ldots\right),<br />
\end{array}

здесь s_1=-(1+\sqrt{5})/2,s_2=(-1+\sqrt{5})/2.

Отсюда

\begin{array}{l}\displaystyle<br />
f_n={1\over \sqrt{5}}(s_2^{-n}-s_1^{-n})={(-1)^n\over<br />
\sqrt{5}}(s_1^n-s_2^n)=\\[5mm]<br />
\displaystyle<br />
={(-1)^n\over \sqrt{5}}\left(\left({-1-\sqrt{5}\over 2}\right)^n-\left({-1+\sqrt{5}\over 2}\right)^n\right).<br />
\end{array}

Здесь мы воспользовались тем, что s_1s_2=-1.

**5. Числа Каталана**

Еще одна известная последовательность: *последовательность Каталана* 1,1,2,5,14,42,132,\ldotsОна задается соотношением c_0=1, c_{n+1}=c_0c_n+c_1c_{n-1}+c_2c_{n-2}+\ldots+c_nc_0. Так, например, при n=4получаем c_4=14=1\cdot5+1\cdot2+2\cdot1+5\cdot1.

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана:

Cat(s)=c_0+c_1s+c_2s^2+c_3s^3+\ldots=1+s+2s^2+5s^3+14s^4+\ldots

Определяющее соотношение для производящей функции означает, что она удовлетворяет следующему уравнению:

Cat(s)=sCat(s)Cat(s)+1,

из которого легко найти саму производящую функцию

\displaystyle Cat(s)={1-\sqrt{1-4s}\over 2s}.

Этот вид производящей функции позволяет найти формулу для чисел Каталана. Согласно общей формуле бинома Ньютона имеем

\displaystyle c_n={(1/2)(1/2)(3/2)\ldots((2n-1)/2)4^{n+1}\over 2(n+1)!},

или, умножая числитель и знаменатель на n!и сокращая на 2^{n+1}, получаем

\displaystyle c_n={(2n)!\over n!(n+1)!}={1\over n+1}{\sf C}_{2n}^n.

Эта формула дает и более простое рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

\displaystyle c_{n+1}=c_n{4n+2\over n+2}.

**Задачи.**

**1.** Решите последовательности

**а)** a_n=-2a_{n-1}+a_{n-2}+2a_{n-3}, a_1=-2, a_2=6, a_3=-8.

**б)** a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}, a_1=-1, a_2=5, a_3=3.